

SIMULACIÓN NUMÉRICA DE TRANSICIONES DE FASE TOPOLÓGICAS EN SUPERFLUIDOS BIDIMENSIONALES

Cristian R. Ghezzi^a

^a*Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de La Pampa, Argentina, gluon00@yahoo.com, <http://www.unlpam.edu.ar>*

Palabras Clave: Modelo 2D XY, Superfluidos, Superconductores, Transición de fase topológica

Resumen. En este trabajo se estudian las transiciones de fase topológicas en el modelo de espines XY clásico bidimensional. Este modelo representa diversos sistemas físicos que están en la misma clase de universalidad, como la superfluidez en películas finas y la transición sólido-líquido. Se desarrolló un método original basado en autómatas celulares que arroja resultados compatibles con la teoría y se comparan con simulaciones de Monte Carlo.

1. INTRODUCCIÓN

Los medios materiales pueden experimentar transiciones de fase en función de los cambios en las variables termodinámicas intensivas. El cambio de fase puede ser de primer orden o de segundo orden, dependiendo de la continuidad de las derivadas de la energía libre respecto de dichas variables. Si a lo largo de un camino en el espacio de fases de la sustancia la derivada primera de la energía libre es discontinua la transición de fase es de primer orden. En cambio cuando la discontinuidad se da en la segunda derivada la transición se denomina de segundo orden. En los materiales magnéticos el parámetro de orden es la magnetización o la densidad de magnetización. Este parámetro define las diferentes fases del material. De manera muy sucinta, un material está en una fase ferromagnética cuando la temperatura es menor que un valor crítico $T < T_c$, y es paramagnética cuando la temperatura es mayor que la temperatura crítica $T > T_c$. La transición de fase puede ser de primer orden a lo largo de una línea de coexistencia de fases $H = 0$, pero puede ser continua y de segundo orden cuando $T > T_c$. En el punto crítico, donde termina dicha línea de coexistencia, el sistema se vuelve muy susceptible a perturbaciones externas, y las funciones de respuesta como el calor específico y la susceptibilidad magnética divergen. En las vecindades del punto crítico la función de correlación entre las partículas también diverge. El sistema queda correlacionado a gran escala, y la respuesta del sistema no depende de los detalles microscópicos. Por lo tanto, diversas sustancias en una vecindad del punto crítico pueden tener características muy similares y pertenecer a la misma clase de “universalidad”. Considerando un sistema plano, si las interacciones son de “corto alcance” la longitud de correlación no puede hacerse infinita en el punto crítico. Esto se debe a que en 2D y a bajas temperaturas las ondas de espín destruyen dicha correlación. Esto está relacionado con la ausencia de magnetización espontánea en 2D y demostrado rigurosamente en el teorema de Mermin-Wagner. Aunque las correlaciones se destruyen debido a las fluctuaciones, el campo puede ordenarse en regiones bastante extensas, separadas por “paredes de dominio”. El punto en donde termina o comienza una pared de dominio se llama centro de dislocación (si hablamos de un cristal), o vórtice si hablamos de un superfluido. Por lo expuesto más arriba, la magnetización no sirve como parámetro de orden en un sistema magnético bidimensional, sin embargo puede definirse un parámetro de orden topológico que básicamente cuenta el número de vórtices y antivórtices en el sistema (Kosterlitz, 2016, 1974; Kosterlitz y Thouless, 1973).

En este trabajo se estudian las transiciones de fase topológicas en el modelo 2D XY, que pertenece a la misma clase de universalidad que los superfluidos, los superconductores y el modelo σ -no lineal utilizado en QCD (ver Huang, 1996). Para tal fin se implementaron dos códigos distintos, el primero utiliza el método de Monte Carlo, basado en el algoritmo de Metropolis. El segundo método es propio: un autómata celular estocástico. Los autómatas celulares (AC) son sistemas dinámicos de muchos cuerpos que evolucionan a pasos discretos en un espacio discreto siguiendo leyes de movimiento locales¹. El origen de los autómatas celulares se remonta a los años cuarenta de la mano de Stanislaw Ulam y estudiado en los cincuenta por John von Neumann. A lo largo de las décadas siguientes el tema avanzó considerablemente. Desde los setenta atrajo la atención de numerosos aficionados por el descubrimiento del “Juego de la Vida”, hecho por el matemático John Conway. El tema fue investigado a fondo por Stephen Wolfram, que descubrió un excelente generador de números aleatorios (Wolfram, 1983). Los AC son utilizados exitosamente en modelos de avalancha entre otras aplicaciones, e.g. ver Gaylord y Nishidate (1996). El mismo Ulam participó del descubrimiento del método de Monte Carlo junto a von Neumann y fue desarrollado posteriormente por Metropolis y Fermi. Aunque dicho

¹Existen otras definiciones equivalentes de autómata celular

método tiene cierta familiaridad con los autómatas celulares, ambos métodos se diferencian notablemente. Aquí se aprovecha dicha similitud para crear un nuevo método de simulación para superfluidos. Este presenta ventajas y desventajas respecto del método de Monte Carlo (MC). Entre las ventajas están: a) el método es muy “rápido”, esto es el sistema se equilibra muy rápido y son necesarias pocas iteraciones -del orden de 50- para obtener resultados consistentes. Esto contrasta con el método MC que necesita del orden de cien mil o más iteraciones por espín para obtener buenas medidas; b) es posible obtener mejor resolución espacial de los defectos topológicos y de los dominios magnéticos. Entre las desventajas esta que el método descarta grados de libertad del sistema, y las mediciones no son precisas (en esto se parece a una teoría de campo medio). Sin embargo, el comportamiento sigue cualitativamente los resultados de la simulación MC y las predicciones teóricas. Los códigos AC y MC fueron implementados en el lenguaje de Mathematica.

2. MODELO 2D XY

El modelo 2D XY consiste de magnetos o espines que pueden orientarse arbitrariamente en el plano. La interacción entre los vectores es de tipo ferromagnética y de corto alcance. El modelo sirve para explicar la transición de fase en una película delgada de ^4He . Según el teorema de Mermin-Wagner no existe orden de largo alcance en espines en 2D con un grupo de simetría continuo e interacciones de corto alcance (menor que $1/r^2$). Por lo tanto, la magnetización de este sistema es nula para cualquier temperatura $T > 0$. Los resultados experimentales parecen contradecir este teorema, ya que en películas delgadas de ^4He se observa una transición en la densidad de superfluido a una temperatura finita. Esta transición no puede ser de primer orden, ya que al mismo tiempo el calor específico permanece acotado (Kosterlitz, 2016). Es entonces que Kosterlitz y Thouless desarrollaron una nueva teoría de transiciones de fase (Kosterlitz y Thouless, 1973). En el modelo 2D XY el Hamiltoniano (funcional de energía) es:

$$H(\theta) = -J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i \cdot s_j = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \cos(\theta_i - \theta_j), \quad (1)$$

donde $\langle i, j \rangle$ indica que la suma se realiza sobre los primeros vecinos en la red (el número de coordinación es cuatro); $J > 0$ es la constante de acoplamiento para un material ferromagnético, y $\theta_i - \theta_j$ indica la diferencia de fase entre espines adyacentes. Se asume que el modelo es clásico; que los vectores son de modulo unidad; que pueden adoptar cualquier orientación en el plano XY, y que están fijos a los puntos de una red cuadrículada. El acoplamiento de tipo ferromagnético favorece que los espines vecinos se orienten paralelos. La función de partición del sistema es:

$$Z = \prod_i \int_0^{2\pi} d\theta_i e^{-\beta H(\theta)}. \quad (2)$$

Pasando al continuo es posible hacer una expansión en serie de potencias del coseno, y en ese caso tenemos:

$$E(\theta) = \frac{1}{2} \rho_0 \int d^2x (\nabla\theta)^2, \quad (3)$$

Donde la constante ρ_0 es:

$$\rho_0 = \begin{cases} J & \text{espines en XY} \\ \frac{\hbar^2 \rho_s}{m^2} & \text{película superfluida} \end{cases} \quad (4)$$

El Hamiltoniano (3) se parece al de un campo libre de interacciones y por lo tanto no muy interesante. Pero existe una diferencia: el campo θ está definido módulo 2π . Esto indica que el Hamiltoniano se podría derivar de una teoría de Ginzburg-Landau, en el caso de que el campo se encuentre en un mínimo muy pronunciado del potencial. De esta manera es posible despreciar los modos masivos y quedarse solo con el Hamiltoniano expresado por la Ec. 3. Este modelo posee soluciones topológicas de tipo solitón, e.g. ver Huang (1998).

La velocidad local del superfluido es $\mathbf{v}_s = \hbar \nabla \theta / \mathbf{m}$, donde θ es la fase de la función de onda del condensado $\psi(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})| e^{i\theta(\mathbf{r})}$. La función de onda debe ser simplemente valuada, por lo tanto el campo θ está definido módulo 2π . Esto significa que la circulación del superfluido esta cuantizada:

$$\oint \mathbf{v}_s \cdot d\mathbf{s} = \frac{2\pi n}{\mathbf{m}}, \quad (5)$$

donde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Los diferentes valores de n definen las cargas topológicas. En particular si $n = +1$ la carga es un vórtice, mientras que si $n = -1$, es un antivórtice. La integral de camino se recorre en sentido anti-horario por convención. El gradiente del campo es:

$$\nabla \theta = \frac{\hat{e}_\theta}{r}, \quad (6)$$

donde la variable angular tiene el mismo nombre que el campo por un abuso de lenguaje: la razón es que una solución del campo es $\theta(r, \theta) = \pm n\theta$. La energía de un vórtice (antivórtice) es:

$$E = \frac{\rho_0}{2} n^2 \int d^2x |\nabla \theta|^2 = \pi n^2 \rho_0 \ln \frac{R}{a}, \quad (7)$$

donde n es la carga, y a es una longitud de corte, que físicamente representa el “core” (núcleo) del vórtice. Puede decirse que el núcleo del vórtice contiene fluido -y no superfluido-, o equivalentemente que el campo está en un estado de vacío diferente que el superfluido circundante. La energía tiende a infinito con la dimensión R de la película. Esto indica que los vórtices no pueden existir aislados, sino en pares vórtice - antivórtice. En una película infinita el número de vórtices debe ser igual al de antivórtices.

2.1. Transición de Kosterlitz-Thouless

El argumento que se utiliza para explicar la transición de fase es el siguiente: consideremos que existen $N/2$ vórtices y $N/2$ antivórtices (con carga $n = \pm 1$) distribuidos uniformemente en el plano XY. La energía libre de Helmholtz del sistema es:

$$F = E - TS, \quad (8)$$

donde E es la energía total:

$$E = N\pi\rho_0 \ln(R/a), \quad (9)$$

y S es la entropía total, igual al logaritmo del número de posibles maneras de acomodar N “partículas” de tamaño a en un cuadrado de $R \times R$. Para un solo vórtice este número es $(R/a)^2$. Por lo tanto

$$S = N \ln (R/a)^2. \quad (10)$$

De manera que la energía libre es

$$F = N(\pi\rho_0 - 2T) \ln(R/a). \quad (11)$$

De donde se desprende que existe una temperatura crítica:

$$T_c = \frac{\pi\rho_0}{2}. \quad (12)$$

Si $T < T_c$ la energía libre es $F > 0$ y el mínimo se alcanza cuando $N = 0$. Esto implica que los vórtices y antivórtices se encuentran fuertemente enlazados en pares; cuando $T > T_c$ la energía libre es negativa y por lo tanto se favorece la formación de vórtices libres $N > 0$.

En el condensado pueden excitarse ondas de espín que requieren baja energía, pero como señala Kosterlitz, no tienen nada que ver con la transición de fase. Son los vórtices y antivórtices los responsables y los que destruyen la correlación de largo alcance para temperaturas arriba de T_c . Lo mismo ocurre en la transición de fase del derretimiento de un cristal. Los fonones no son responsables del derretimiento, sino la formación de dislocaciones en el cristal.

3. AUTÓMATA CELULAR PARA EL MODELO 2D XY

Para el modelo 2D XY el método de Monte Carlo es similar a un autómata celular en el sentido de que la interacción entre los espines es local. La pregunta que surge es si sería posible construir un algoritmo para modelar un superfluido en donde la actualización de cada espín dependa solamente de los vecinos más cercanos. Al mismo tiempo el algoritmo debe realizar la actualización secuencialmente y no de manera estocástica como en el MC. Cualquier algoritmo debe ser capaz de computar la función de partición (Eq. 2), de la que se derivan los diferentes observables termodinámicos del sistema. Es fácil ver que un cálculo exacto de esta función es una tarea formidable aún para redes pequeñas. Por ejemplo, para el modelo de Ising el número de posibles configuraciones del campo crece como 2^{L^2} , esto significa que con $L = 20$ el número de factores en Z es de 2^{400} . Que representa un tiempo de cálculo astronómico. El método MC sortea este problema usando un método estocástico, e.g. ver [Kooning y Down \(1990\)](#). La actualización de cada espín depende del estado de todos los otros espines (a través de Z), y esta es una diferencia fundamental con un AC.

Con el fin de poder implementar un AC para el modelo 2D XY es necesario hacer una aproximación salvaje, pero el resultado final lo justifica: descartar grados de libertad. El algoritmo funciona de la siguiente manera:

a) El segmento $[-\pi, \pi]$ es particionado en 100 partes elegidas aleatoriamente (esto es: $\theta_k = \text{Rnd}[-\pi, \pi]$, $k = 1..100$).

b) Se calcula un valor promedio en la celda de Moore correspondiente al espín j -esimo:

$$\theta'_j = \frac{\sum_{\langle i,k \rangle} \theta e^{\beta J \theta_k \cdot \theta_i}}{\sum_{\langle i,k \rangle} e^{\beta J \theta_k \cdot \theta_i}}, \quad (13)$$

donde $\langle i, x \rangle$ indica que la suma se realiza sobre todos los espines k de la partición y los i -esimos espines vecinos de j .

c) El nuevo valor del campo θ''_j en la posición j es un número aleatorio elegido en el intervalo

$$[-c\sqrt{T} + \theta'_j, +c\sqrt{T} + \theta'_j], \quad (14)$$

donde c es una constante (en este trabajo $c \sim 3\pi/5$), y T es la temperatura.

Este procedimiento se repite para todos los espines de la red. Las condiciones de contorno son periódicas. El estado inicial puede ser “caliente” con una distribución inicial aleatoria de los espines, o “frio” con todos los espines orientados en la misma dirección. Todo el proceso se repite una cierta cantidad de veces hasta que el sistema alcanza un “punto fijo” y su evolución

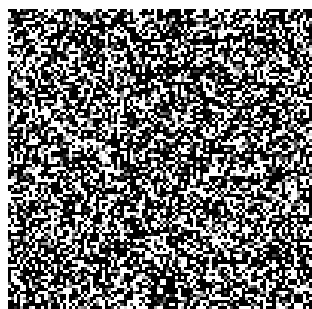


Fig. 1.1: Config. inicial caliente (100×100).



Fig. 1.2: Campo final con $T = 0,1$.



Fig. 1.3: Campo final con $T = 1,1$.

se hace mas lenta. Con ~ 50 iteraciones por espín es más que suficiente para alcanzar dicho punto fijo.

Obviamente el algoritmo presentado arriba es radicalmente diferente a un MC. Los resultados pueden verse en las Figs. 1.1, 1.2 y 1.3. Con un comienzo caliente luego de algunas iteraciones el campo forma dominios magnéticos para $T = 0,1$. Aun cuando se forman dichos dominios la magnetización total siempre es nula (o cero dentro de la desviación cuadrática media del campo). Esto mismo no es verdad en un MC debido a los efectos de tamaño finito.

En la Fig. 2.1 puede verse un diagrama de densidad superpuesto con un diagrama vectorial, que muestra el campo para $T > T_c$ en una zona aumentada. Las zonas oscuras del gráfico coinciden con las paredes de dominio. En el centro de la figura la cuerda que parece una letra “S” reflejada concentra defectos topológicos a lo largo de su extensión. La Fig. 2.2 muestra las líneas de flujo de campo para la misma simulación. Los vórtices (carga topológica +1) son los remolinos, mientras que los antivórtices (carga topológica -1) son los puntos de ensilladura. En ambas figuras se puede apreciar claramente que la cuerda que aparece a la derecha posee un vórtice en su extremo.

A bajas temperaturas $T < T_c$ no hay vórtices. Esto se puede apreciar en las Figs. 3.1 y 3.2. En la Fig. 3.1 no se observan paredes de dominio ni vórtices. Tampoco se ve ningún remolino en el diagrama de flujo en la Fig. 3.2. El número de vórtices comienza a aumentar con la temperatura desde $T = T_c$.

En las Figs. 4.1 y 4.2 se observa que para $T \gg T_c$ los vórtices aparecen libres. Se observa que cerca del centro de las figuras aparecen dos vórtices y dos antivórtices que no están conectados por una cuerda. Adicionalmente, la densidad de vórtices y antivórtices es mayor que en la simulación mostrada en las Figs. 2.1 y 2.2, en acuerdo con la teoría KT. Cerca del punto crítico es muy difícil ver y contar los pares vórtice y antivórtice, ya que se encuentran a muy corta distancia entre sí.

Es notable, que la temperatura a la cual comienzan a aparecer los vórtices coincide con la temperatura crítica ($T_c \sim 1$) calculada con el método MC (ver sección siguiente).

La desventaja del método es que las mediciones de la correlación entre espines no es exacta. La correlación entre espines decrece con la temperatura, sin embargo no decae con la distancia como predicho por la teoría de Kosterlitz-Thouless.

3.1. Implementación numérica

Los códigos se implementaron en el lenguaje Mathematica de Wolfram. Para realizar los gráficos se asume que el campo es continuo y se interpola entre los puntos de la red con polinomios de orden 3. Se verifico la consistencia de los resultados usando polinomios de distinto orden.

En los códigos se usó un estilo híbrido entre estructurado y funcional. La programación estructurada en Mathematica hace los códigos más lentos en general, aunque también más legibles. Por ejemplo, una parte del cálculo de la correlación de espines se calcula con un ciclo de este tipo:

```
For[k = 0, k <= nm, k++,
  m1 = Map[RotateRight[Mx, #] &, {{-k, 0}, {k, 0}, {0, k}, {0, -k}}];
  m2 = Map[RotateRight[My, #] &, {{-k, 0}, {k, 0}, {0, k}, {0, -k}}];
  cx = Mx (m1[[1]] + m1[[2]] + m1[[3]] + m1[[4]]);
  cy = My (m2[[1]] + m2[[2]] + m2[[3]] + m2[[4]]);
  cx1 = Flatten[cx];
  cy1 = Flatten[cy];
  cx2 = Apply[Plus, cx1];
  cy2 = Apply[Plus, cy1];
  c = (cx2 + cy2)/(4 n2);
  correl[[1, k]] = c];
```

Mathematica aún tiene pocas funciones que aprovechan la potencia de las GPU's. Las funciones Cuda existentes son elementales y no sirven para acelerar el código. En general para las subrutinas en las que se usó Cuda la latencia del dispositivo fue mayor que el tiempo de cálculo en la CPU. Por lo tanto el uso de Cuda quedó descartado. En futuras versiones sería deseable usar CUDALink para acelerar las subrutinas más costosas -por medio de una implementación C-CUDA-Mathematica- especialmente en el MC, ya que el AC es muy rápido (segundos frente a varias horas de tiempo de simulación).

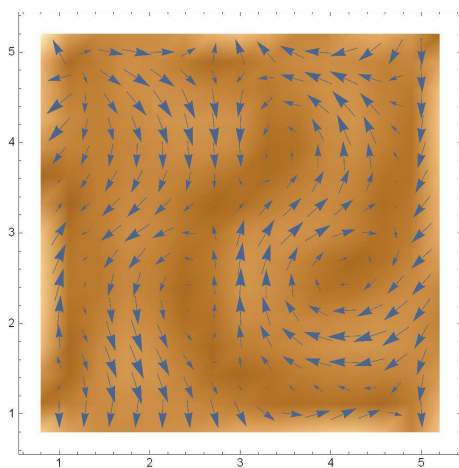


Fig. 2.1: Gráfico de densidad y campo vectorial con $T = 1,5$.

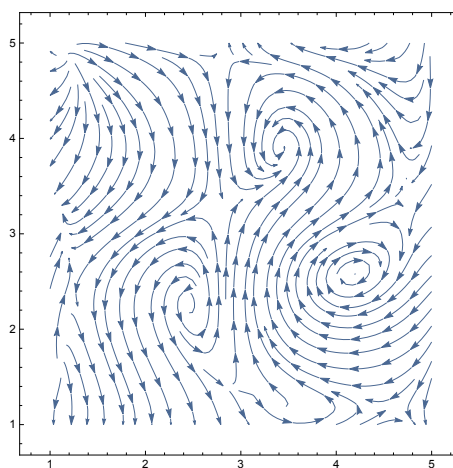


Fig. 2.2: Líneas de flujo del campo con $T = 1,5$.

4. SIMULACIÓN MONTE CARLO DEL MODELO 2D XY

Es posible verificar la transición de KT en el modelo 2D XY con un código MC (Suzuki et al., 1977; Olsson, 1995; McCarthy, 1986).

La T_c se conoce a partir del modelo teórico KT (Kosterlitz, 2016), y por simulaciones numéricas ($T_c = 0,89213(10)$, e.g. ver Olsson (1995)). Si la red es pequeña la temperatura crítica es ligeramente mayor. En este trabajo se implementa un número bajo de iteraciones y redes pequeñas para ahorrar tiempo y energía: 100 – 1000 iteraciones por espín para equilibrar el sistema, y entre 1000 y 10000 iteraciones por espín para las mediciones, con intervalos de periodo ~ 15 .

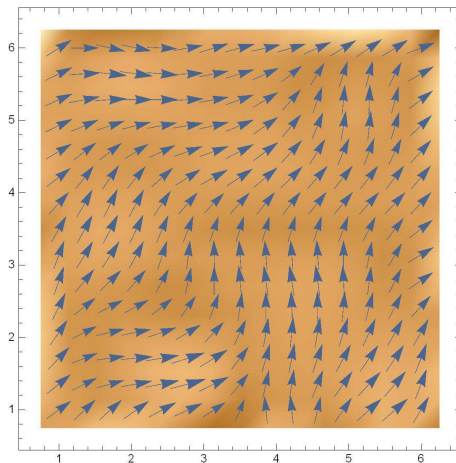


Fig. 3.1: Gráfico de densidad y campo vectorial con $T = 0,1$.

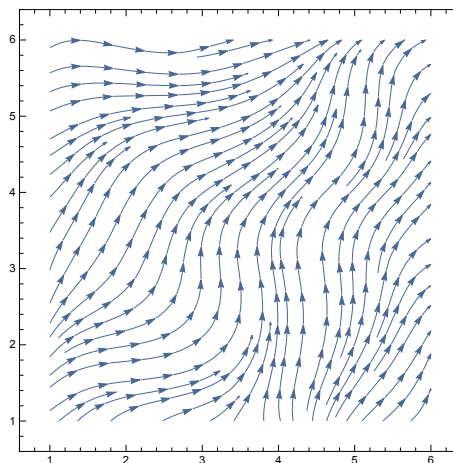


Fig. 3.2: Líneas de flujo del campo con $T = 0,1$.

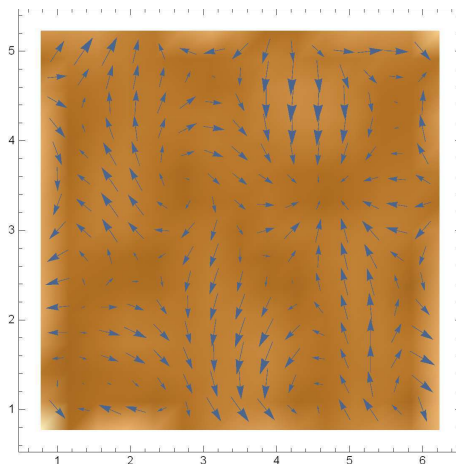


Fig. 4.1: Gráfico de densidad y campo vectorial con $T = 2,7$.

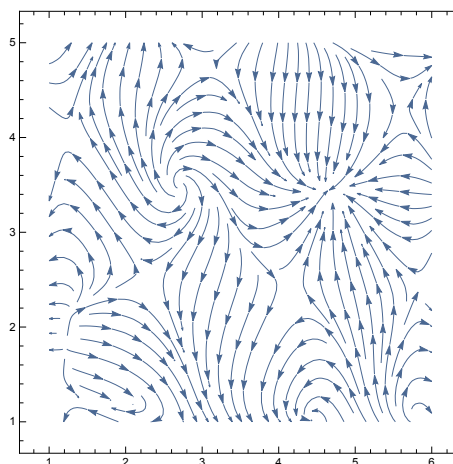


Fig. 4.2: Líneas de flujo del campo con $T = 2,7$.

Las mediciones que confirman la transición de KT son la función de correlación de espines y el calor específico. La función de correlación de espines se define como, e.g. ver [Chandler \(1987\)](#):

$$G(r, T) = \langle \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j \rangle - \langle \mathbf{s}_i \rangle \langle \mathbf{s}_j \rangle, \quad (15)$$

donde los paréntesis angulares indican promedio termal sobre el ensamble. Mas explícitamente

$$G(r, T) = \left\langle \frac{1}{N_{ij}} \sum_{(lm)} \mathbf{s}_l \cdot \mathbf{s}_m \right\rangle_T - \langle \mathbf{s}_i \rangle_T^2, \quad (16)$$

donde la suma (lm) se realiza sobre todos los pares de espines a una distancia r , y N_{ij} es el número de pares de espines a esa distancia. De acuerdo con la teoría de KT para $T > T_c$, y para r grande, decae exponencialmente con la distancia:

$$G(r, T) \approx e^{-r/\xi(T)}, \quad (17)$$

mientras que para $T \approx T_c$ y r grande:

$$G(r, T_c) \approx (r/a)^{-0,25}. \quad (18)$$

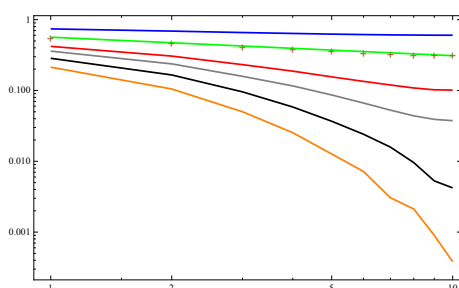


Fig. 5.1: Función de correlación de espines.

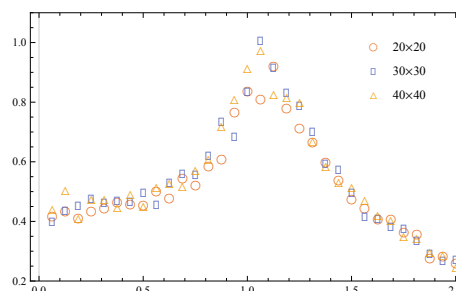


Fig. 5.2: Calor específico.

El resultado de las simulaciones se muestra en las Figs. 5.1 y 5.2. En la Fig. 5.1, se puede apreciar la función de correlación en función de la distancia para distintas temperaturas (gráfico logarítmico). Las cruces indican los datos de la simulación para la temperatura crítica. La recta de ajuste tiene la pendiente que predice la teoría KT: $-0,25$. Se aprecia claramente que para $T < T_c$ la función de correlación es una ley de potencias negativas, mientras que para $T > T_c$ el decaimiento es exponencial. La temperatura de transición para una red de 20×20 es de $T_c \approx 1$.

El otro observable medido es el calor específico, definido como:

$$c_v = \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} = \frac{k_B \beta^2}{N} (\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2). \quad (19)$$

En la Fig. 5.2 se observa el calor específico como función de la temperatura, e.q. ver McCarthy (1986). El máximo no se encuentra exactamente a la temperatura crítica debido al tamaño finito de las redes y al bajo número de iteraciones en las simulaciones.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se implementaron dos códigos distintos para demostrar la transición de fase de Kosterlitz-Thouless. Con el Monte Carlo es posible demostrar la transición de fase y obtener medidas precisas. Por otro lado, se implementó un método original basado en un autómata celular. Los resultados son compatibles con la transición de KT y el método es mucho más rápido que el MC. El algoritmo no se deriva estrictamente de la función de partición del modelo 2D XY, y en este sentido el AC es un modelo de juguete. Sin embargo, la compatibilidad de los resultados conduce a pensar que existe una estrecha relación con dicho modelo. Esto es algo que resta demostrar formalmente.

REFERENCIAS

- Chandler D. *Introduction to modern statistical mechanics*. Oxford University Press, 1987.
- Gaylord R.J. y Nishidate K. *Modeling Nature. Cellular autómata Simulations with Mathematica*. Springer-Verlag New York, 1996.
- Huang K. *Quantum Field Theory. From Operators to Path Integrals*. John Wiley & Sons, 1998.
- Kooning S. y Down M. *Computational Physics. Fortran version*. Westview Press, 1990.
- Kosterlitz J.M. The critical properties of the two-dimensional xy model. *J. Phys. C: Solid State Phys.*, 7, 1974.
- Kosterlitz J.M. Kosterlitz-thouless physics: A review of key issues. *Rep. Prog. Phys.*, 79, 2016.
- Kosterlitz J.M. y Thouless D.J. Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems. *J. Phys. C: Solid State Phys.*, 6, 1973.

- McCarthy J.F. Numerical simulation of the xy model on a two-dimensional random lattice. *Nuclear Physics B*, 275, 1986.
- Olsson P. Monte carlo analysis of the two-dimensional xy model. ii comparison with the kosterlitz renormalization-group equations. *Phys. Rev. B*, 52, 1995.
- Suzuki M., Miyashita S., Kuroda A., y Kawabata C. Monte carlo simulations of the two-dimensional quantal and classical spin systems. a new type of phase transition with vortices. *Phys. Lett.*, 32, 1977.
- Wolfram S. Statistical mechanics of cellular automata. *Journal of Numerical Methods*, 55, 1983.